数理解析研究所講究録
719巻 1990年 58-65

円管流の不安定性に関するコメント

日本情報サービス　宗像健一 (Ken-iti Munakata)

1. はじめに

よく知られているように，円管内の粘性流体の流れに関するReynolds(1883)の実験によって，レイノルズ数がある臨界値Re_cを超えるとき，層流から乱流への遷移が起こることが明らかになった．ところが，理論的にこの臨界値Re_cを求めようとすると大きな困難にぶつかり，有限な臨界レイノルズ数が求められるか否かという問題に関しては，多くの人びとの研究が行われたにも拘わらず，未だに一般的な意見の一致が得られていない状況である．

流れの安定性理論においては，基本となる層流のうえに，管軸方向に一定の波数をもつ周期的な微小攪乱を加えるものとして，時間の経過とともに攪乱が減衰するか，または増幅するかということを調べる．任意の攪乱がすべて減衰するとき層流は安定であるという．増幅する攪乱が１つでもあれば層流は不安定であるとする．安定から不安定への移り変わりを示す中立安定の状態が初めて現れるレイノルズ数をもってRe_cとし，遷移の開始を特徴づけるものと考えればよい．この線形安定性理論は既に早くより確立されており，例えば，平板境界層の遷移に関しては，この安定性理論を適用することによって，理論と実験の見事な一致が認められている．

ところが，円管内の Hagen-Poiseuille 流に関しては，過去に多数の研究[1~10]が行われたにもかかわらず，R_{e_c} が理論的に求められないという事態が永年にわたって続いてきた．その間に，円管 Poiseuille 流は微小撹乱に対してはすべてのレイノルズ数にわたって安定であるとする推測が芽生えてきて，それは決して実証された訳でもないのに，これを支持する学者が国の内外を問わず案外少なくない模様である．すでに，Goldstein(1938)[11]にも控え目な表現ながら，次のような記述が見られる．

The available evidence seems to show, however, that R_{crit} could be increased indefinitely if the disturbances present could be decreased indefinitely.

さらに，実験と理論とのあいだの矛盾を解決するためには有限振幅の撹乱としての取扱いが必要であるという考え方が特定の人々のあいだに支配的になってきて，そのような見解を断定的に主張した専門書[12]まで現れる状況である．然しながら，レイノルズ数が大きい場合の非線形問題に対する解析方法が確立されていない現在，彼等の主張は根拠が薄弱であると言わねばならない．

筆者は前報[13]にも述べた通り，円管内Poiseuille流の線形不安定性について固有関数展開法をもちいて詳細な研究を行ってきた．その後も種々の面から検討を加え，理論に内部矛盾や大きな欠陥は見当らないことを確かめた．結論として，線形近似の範囲でも有限な臨界レイノルズ数が求められることを示して，実験結果と理論解析との間に存在した矛盾を解消し得たものと考えている[14]．

もちろん，この問題の完全な解決のためには Navier-Stokes方程式という非線形方程式を解かねばならない．更に，現実の境界条件や初期条件には，微小ではあっても有限の撹乱がランダムに含まれていることも考慮しなければならないが，

そのためには新しい手法が必要になるであろう．そこで、当面問題を線形近似理論の範囲に限るとしても，種々の異なった立場から可能な限りさまざまな解法を適用して検討を加えることが望ましい．

それにつけても不思議な事は，過去に行われた研究において，有限の臨界レイノルズ数が求められなかったのは如何なる理由によるものか？　この疑問にいくらかでも答えることができるならば，事態の解明に役立つであろうと考えて，若干の検証と追試を行ったので，今回はその結果について簡単に報告したい．

２．　解析の手法

円管の内部で圧力勾配をうけて流れている粘性流体の，撹乱に対する挙動を決定するものは，云うまでもなく次の三つの要件である．

（１）運動方程式

（２）連続方程式

（３）境界条件

３次元の運動方程式を非線形のままで取り扱うことは，現代の大型スーパーコンピュータをもってしても決して容易なことではない．従って，撹乱速度（及びその微係数）が小さいと仮定して，線形化した運動方程式を解くことになるが，それが厳密に解けるか，あるいは近似解をもって満足するかという点になると，すでに線形化近似を施した後であるだけに，これにこだわることの意味は薄れている．しかし撹乱速度としては，あくまで３次元の一般的な分布を想定し，これを表現することが可能でなければならない．

連続方程式は質量保存の法則を表すものであるから，厳密に満足されているこ

とが必要である．もしもこれを近似的に扱ったために，空間内任意の点で質量が勝手に現れたり消えたりするならば，もともと微妙な問題である安定性などは捕らえどころが無くなることであろう．

また，境界条件に関しても厳密性を守らなければならない．もしも，壁面上で垂直方向に流体が出たり入ったりしたり，あるいは表面を滑ったりすることを許すならば，安定性の判定に微妙な影響を与えることは避けられないであろう．

このように考えて来ると，上の３要件に重み付けをするならば，（２）と（３）を優先して（１）は近似的に扱うのが賢明であると思われる．以上を前提として，過去に行われた数多くの研究報告の中から，計算にコンピュータを使用したものを選び，Garg and Rouleau(1972)[7](以下ではＧＲと略称する) 及び Salwen and Grosch(1972)[6](ＳＧと略称)を検討の対象とすることにした．

３． 数値積分の方法

２点境界値問題の解を常微分方程式の数値積分によって求める時， 一方の点(r=0)では厳密に境界条件を満たしているとしても，他の点(r=1)では近似的に条件を満たすことが多い（シューティング メソッド）．（ＧＲ）はこの方法を使っていて，前節に述べたように，ここに一つの問題があるが，更に一層大きな問題点が存在する．

筆者が前報[13]に示したように，区間（０，１)に多数の零点を持った固有関数を求めることが必要である．改めて言うまでもなく，求めるべき固有値，固有関数は無限に多くある．更にその間に，臨界層あるいは転移点と呼ばれる特異性が現れるときに，この解法が旨く適用できるかどうか疑問がある．現に（ＧＲ）は

数個の零点をもつ波形を扱っているに止まるから，これで問題が解決したとは到底主張できないであろう．

4．固有関数展開の方法

関数展開の方法で問題を解くためには，物理的な意味を持った別の問題であって，然も厳密に解けるような方程式の固有関数列を使用して，求める解を近似的に表現することを考える．その固有関数列を利用して，連続方程式と境界条件を共に厳密に満足するような関数系を構成する．ただし，これらの条件だけでユニークに決まる訳ではないから，関数系については幅広い選択の余地があることを注意しておきたい．また運動方程式は Galerkin 法に従って，平均的に満足することを考える．

（ＳＧ）が採用した解法は，彼等の記述に従えば，直交関数の完全系をもちいて所要の解を展開したということである．その限りにおいては，筆者の解法と共通点があり，結論が正反対になったことは単純には理解し難い事である．しかし詳細に検討を加えた結果，それには相当の理由があることが判明した．

（ｉ）スパイラル モード

彼等は，Poiseuille流に対する線形化した運動方程式において，主流の速度分布を表す項である $W=1-r^2$ を恒等的に０に等しいと置いている．言い変えれば，円管の内部で静止している流体に撹乱速度を与えるという問題を取り上げている．

これは厳密に解ける問題であって，全ての固有モードの撹乱は減衰するから，静止している流体は安定であるという当然の結論が得られる．固有関数は

$$v(r)=J_1(k_\nu r) \qquad \nu=1,2,3\cdots\infty \tag{1}$$

の形に求められる．ここに，k_ν は Bessel 関数 $J_1(r)$ の零点である．

（ＳＲ）に従えば直交完全関数系（１）を利用して Poiseuille 流の安定性を調べた結果，不安定性を示す固有値は得られなかったということである．念の為に今回追試を行ったが，結果はもちろん同じ事であった．

筆者の独断と偏見を交えて批判を行うならば，以下の理由により，それは当然のことである．スパイラル モード の安定性を決める微分方程式は複素係数を含む２階の常微分方程式であるから，実数では４階の方程式に相当する．それに対して，２階の方程式の解に過ぎない（１）の関数系を使って近似的に解こうとしても，良い結果を期待することはできない．

これと同様に安定という結論は次の関数系を使用する場合にも成立する．

$$v(r)=\sin(2n-1)\pi r \qquad n=1,2,3\cdots\infty \tag{2}$$

更に，別の解法として下記の（３），（４）で与えられる関数系を使用した場合にも，同様に安定という結論しか得られなかった．ここに $I_0(r)$は変形Bessel関数であり，この関数系は４階の方程式を満たしている．

$$v(r)=r\{J_0(kr)+\lambda I_0(kr)\} \tag{3}$$

$$J_0(k)/I_0(k)=J_1(k)/I_1(k)=-\lambda \tag{4}$$

ここで比較の為に，筆者が不安定性を導いたときに採用した関数系を，Bessel関数と変形 Bessel 関数によって表示しておくと次のようになる．

$$v(r)=2r\{J_0(kr)+\lambda I_0(kr)\}-r^2k\{J_1(kr)-\lambda I_1(kr)\} \tag{5}$$

$$J_0(k)/I_0(k)=-J_1(k)/I_1(k)=-\lambda \tag{6}$$

(ii) 軸対称モードと非対称モード

これらのモードを扱うさいには，運動方程式に現れる圧力 p をどのように処理するか，という問題が発生する．（ＳＲ）の解法においては，

$$p \sim I_n(\alpha r) \qquad n=0,1,2\cdots \tag{7}$$

とおいているから，圧力分布が単調な変化を示すものと最初から仮定している事になる．これによって，調べられる攪乱の範囲が，極めて狭い範囲に限定されたことになる．実際には，微細な時間空間的変動を含む，速度と圧力の波形を調べる事が必要であるから，当初からこれを除外した解析によって得られた結論は信用できないといっても，過言ではない．

それに対して，吾々の採用した解法では，圧力を消去した渦度に対する運動方程式を基礎にしている．速度分布が得られたのちに，必要ならば積分によって圧力を求めれば良いという考え方をとっている．

5． 結び

安定説を支えている多数の論文のうちで，僅か二つについて検討を加えたに過ぎないが，それらは案外に脆いものである事が分った．改めて言うまでもない事であるが，安定説を立証するためには，考えられる限りの全ての攪乱に対して，それが減衰することを示さなければならない．

これに反して，不安定説を主張するためには，一つでも増幅する撹乱が見つかれば良いのであるが，実際には，これまでに筆者が調べた全てのモードについて，レイノルズ数が大きいときには増幅する撹乱が出現することが分っている．解析方法に新たに誤りが発見されない限り，基本的には問題は解決されたと主張して差し支えないと思われる．

文　献

1) T.Sexl: Ann.Phys.**83**(1927)835;**84**(1927)807.
2) J.L.Synge: *Hydrodynamic Stability.* Semicentennial Publ. Am. Math. Soc.**2**(1938)227.
3) C.L.Pekeris: Proc. U.S. Nat. Acad. Sci.**34**(1948)285.
4) A.E.Gill: J.Fluid Mech.**21**(1965)145.
5) A.Davey and P.G.Drazin: J.Fluid Mech.**36**(1969)209.
6) H.Salwen and C.E.Grosch: J.Fluid Mech.**54**(1972)93.
7) V.K.Garg and W.T.Rouleau: J.Fluid Mech.**54**(1972)113.
8) H.Salwen,F.W.Cotton and C.E.Grosch: J.Fluid Mech.**98**(1980)273.
9) F.T.Smith and R.J.Bodonyi: Proc.Roy.Soc. Lond. **A384**(1982)463.
10) K.Munakata: J. Phys. Soc. Jpn.**52**(1983)2004.
11) S.Goldstein: *Modern Developments in Fluid Dynamics I* (1938) p.321.
12) P.G.Drazin and W.H.Reid: *Hydrodynamic Stability*(1981)p.4.
13) 宗像健一: 数理解析研究所講究録661(1988)13.
14) K.Munakata: 10)の続編として投稿中.